Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Уральский
энергетический
институт

Ю. В. АВЕРБУХ
Т. И. СЕРЕЖНИКОВА

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Ю. В. Авербух, Т. И. Сережникова

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Рекомендовано методическим советом УрФУ в качестве ***учебно-методического пособия*** *для студентов, обучающихся по направлениям подготовки:*
230401 – Прикладная математика (специалитет),
220300 – Автоматизированные технологии и производства (специалитет),
231300 – Прикладная математика (бакалавриат)

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 517.972(075.8)
ББК 22.161.8я73
А19

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. А. Тимофеева*, зав. кафедрой «Высшая и прикладная математика» УрГУПС; канд. физ.-мат. наук *А. А. Усова*, науч. сотр. отдела динамических систем ИММ УрО РАН

Научный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. *А. Н. Сесекин*

Авербух, Ю. В.

А19 Простейшие задачи вариационного исчисления : учеб.-метод. пособие / Ю. В. Авербух, Т. И. Сережникова. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. — 44 с.

ISBN 978-5-7996-1250-4

В издании введено понятие простейшей задачи вариационного исчисления. Рассмотрен случай закрепленных концов и случай свободного правого конца. Для обеих задач приведено необходимое условие первого порядка. Для простейшей задачи вариационного исчисления в скалярном случае указано необходимое условие второго порядка. Также для этой же задачи в общем случае приведены достаточные условия.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 517.972(075.8)
ББК 22.161.8я73

ISBN 978-5-7996-1250-4

Содержание

1. Введение

Настоящее пособие посвящено изучению простейших задач вариационного исчисления. Нами будет рассмотрены задачи с фиксированным и со свободным правыми концами. Для задачи с фиксированным правым концом кроме необходимого условия первого порядка будут рассмотрены необходимые условия второго порядка и достаточные условия.

Отметим, что вариационному исчислению посвящено множество работ. Некоторые из них указаны в списке литературы. Материал параграфов 2–6 следует книге [1]. Материал параграфов 7, 8 изложен в соответствии с [5]. Параграфы 9 и 10 следуют учебнику [7]. Также отметим учебники [4], [6], они содержат необходимые условия. Важная, но трудная в освоении монография [3] может быть рекомендована студентам специальности «Прикладная математика». Отметим, что для закрепления материала полезно прорешать задания из сборника задач [2].

2. Постановка задачи

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, это вектор-столбец, то есть

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем вектор-столбцы будем называть просто векторами. Множество n-мерных вектор-столбцов будем обозначать через $\mathbb{R}^n$. Вектор-строка есть $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Вектор-строки будем называть *ковекторами*. Множество всех ковекторов будем обозначать через $\mathbb{R}^{n*}$. Операцию транспонирования будем обозначать через ^{T}, эта операция переводит строку в столбец и наоборот. Если $s \in \mathbb{R}^{n*}$, $x \in \mathbb{R}^n$, то

$$sx = \sum_{i=1}^{n} s_i x_i$$

есть произведение ковектора s на вектор x. Если $x \in \mathbb{R}^n$, то длина вектора x есть

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Основное внимание в данном пособии уделяется вектор-функциям, то есть функциям $t \mapsto x(t)$. Мы будем предполагать достаточную гладкость функций. Вектор-функцию $t \mapsto x(t)$ как целое мы будем обозначать $x(\cdot)$. Если

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

то производная по времени функции $x(t)$ есть вектор, составленный из производных

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

Кроме вектор-функций времени, мы будем рассматривать скалярные функции одного или нескольких векторных аргументов. То есть функции $(t, x, u) \mapsto F(t, x, u)$. Здесь t – время (скалярный аргумент), x и u – n-мерные векторы. Частные производные будем обозначать через F_t, F_x и F_u соответственно. При этом мы считаем, что F_x и F_u – ковекторы

$$F_x(t, x, u) = \left(\frac{\partial F(t, x, v)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(t, x, u)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F(t, x, u)}{\partial x_n} \right),$$

$$F_u(t, x, u) = \left(\frac{\partial F(t, x, u)}{\partial u_1}, \frac{\partial F(t, x, u)}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial F(t, x, u)}{\partial u_n} \right).$$

Напомним, что если заданы функции некоторого аргумента α $x(\alpha)$ и $u(\alpha)$, то полная производная функции $F(t, x(\alpha), u(\alpha))$ равна

$$\frac{d}{d\alpha} F(t, x(\alpha), u(\alpha)) = F_x(t, x(\alpha), u(\alpha)) \frac{dx(\alpha)}{d\alpha} + F_u(t, x(\alpha), u(\alpha)) \frac{du(\alpha)}{d\alpha}. \quad (1)$$

Принято называть функцию, которая сопоставляет функции $x(\cdot)$ число $J[x(\cdot)]$, *функционалом.*

Простейшая задача вариационного исчисления формулируется следующим образом. Среди всех функций $x(\cdot)$ таких, что $x(t^0) = x^0$, $x(t^1) = x^1$, найти функцию, минимизирующую функционал

$$J_1[x(\cdot)] = \int_{t^0}^{t^1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt. \tag{2}$$

Аналогично формулируется простейшая задача вариационного исчисления со свободным правым концом (задача Больца). Среди всех функций $x(\cdot)$ таких, что $x(t^0) = x^0$, найти функцию, минимизирующую функционал

$$J_2[x(\cdot)] = \int_{t^0}^{t^1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \sigma(x(t^1)). \tag{3}$$

Значения t^0, t^1, x^0 и x^1 считаем фиксированными параметрами задачи.

В дальнейшем будем называть непрерывно дифференцируемые функции $x(\cdot)$ такие, что $x(t^0) = x^0$, $x(t^1 = x^1)$ (для задачи с закрепленными концами) и $x(t^0) = x^0$ (для задачи со свободным правым концом) *допустимыми.*

В дальнейшем будем использовать понятие метрики. Метрикой на множестве X называется функция $\rho(x, y)$ такая, что

1) $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Для того чтобы найти расстояние между двумя функциями, мы используем две метрики. Первая метрика использует лишь значение функций, вторая использует значение самих функций и их производных.

Положим,

$$\rho_0(x(\cdot), y(\cdot)) \triangleq \max_{t\in[t^0,t^1]} \|x(t) - y(t)\|,$$

$$\rho_1(x(\cdot), y(\cdot)) \triangleq \max_{t\in[t^0,t^1]} \|x(t) - y(t)\| + \max_{t\in[t^0,t^1]} \|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\|.$$

Определение 1. Будем говорить, что $x_*(\cdot)$ является *сильным локальным минимумом* в задаче с закрепленными концами (со свободным правым концом), если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой функции $x(\cdot)$ такой, что $\rho_0(x_*(\cdot), x(\cdot)) < \varepsilon$, выполнено неравенство $J_1[x_*(\cdot)] \leq J_1[x(\cdot)]$ $(J_2[x_*(\cdot)] \leq J_2[x(\cdot)])$.

Отметим, что сильный минимум использует близость функций. Если учитывать и близость производных, то получается понятие слабого минимума.

Определение 2. Будем говорить, что $x_*(\cdot)$ является *слабым локальным минимумом* в задаче с закрепленными концами (со свободным правым концом), если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой функции $x(\cdot)$ такой, что $\rho_1(x_*(\cdot), x(\cdot)) < \varepsilon$, выполнено неравенство $J_1[x_*(\cdot)] \leq J_1[x(\cdot)]$ $(J_2[x_*(\cdot)] \leq J_2[x(\cdot)])$.

Аналогично вводятся понятия сильного и слабого локальных максимумов. Если функция $x_*(\cdot)$ доставляет либо локальный минимум, либо локальный максимум, то говорят, что она доставляет локальный экстремум.

В некоторых задачах интерес представляет глобальный экстремум, в то же время глобальный экстремум обязательно является локальным экстремумом, и задача нахождения глобального экстремума может быть решена с использованием перебора всех локальных экстремумов.

В заключение отметим связь сильного и слабого экстремума.

Предложение 1. *Если $x_*(\cdot)$ – сильный минимум (максимум), то $x_*(\cdot)$ – слабый минимум (максимум).*

Доказательство. Мы докажем это утверждение для задачи с закрепленными концами. В самом деле, пусть ε таково, что для любой допустимой функции $x(\cdot)$, удовлетворяющей условию $\rho_0(x_*, x(\cdot)) < \varepsilon$, верно неравенство $J_1[x_*(\cdot)] \leq J_1[x(\cdot)]$. Так как $\rho_0(x_*(\cdot), x(\cdot)) \leq \rho_1(x_*(\cdot), x(\cdot))$, то из неравенства $\rho_1(x_*(\cdot), x(\cdot)) < \varepsilon$ следует неравенство $\rho_0(x_*(\cdot), x(\cdot)) < \varepsilon$. Откуда мы заключаем, что для любой допустимой функции такой, что $\rho_1(x_*(\cdot), x(\cdot)) < \varepsilon$, верно неравенство $J_1[x_*(\cdot)] \leq J_1[x(\cdot)]$. Это в точности определение слабого экстремума. $\square$

Обратное утверждение неверно. Для того чтобы это показать, рассмотрим пример. Мы минимизируем функционал

$$J_1[x(\cdot)] = \int_0^1 (2\dot{x}^2(t) - \dot{x}^4(t))dt$$

при условиях $x(0) = x(1) = 0$. Здесь предполагается, что $x(t)$ является числом. Отметим, что функция $x_*(t) \equiv 0$ является слабым минимумом, но не является сильным. В самом деле, у функции $F(v) = 2v^2 - v^4$ число $v = 0$ является локальным, но не глобальным минимумом. Если $|\dot{x}(t)| < \sqrt{2}$, то

$$\int_0^1 (2\dot{x}^2(t) - \dot{x}^4(t))dt > 0.$$

Однако, если мы рассмотрим функции $x_k(t) = \sin(k^2\pi t)/k$, то $\rho_0(x_*(\cdot), x_k(\cdot)) \to 0$, а $J_1[x_k(\cdot)] \to -\infty$ при $k \to \infty$.

Основное внимание далее уделяется условиям слабого минимума.

3. Необходимые условия первого порядка для задачи с закрепленными концами

Теорема 1. *Пусть $x_*(\cdot)$ доставляет функционалу J_1 слабый локальный экстремум в классе функций с закрепленными концами. Тогда вдоль этой функции выполнено соотношение (уравнение Эйлера–Лагранжа)*

$$F_x(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы отступить от $x_*(\cdot)$ вдоль некоторого функционального направления. Будем считать, что это направление задается функцией u. То есть мы рассматриваем теперь некоторую (произвольную) функцию $u(\cdot)$, интеграл которой равен 0

$$\int_{t^0}^{t^1} u(t) = 0,$$

положим

$$y(t, u(\cdot)) = \int_{t^0}^{t} u(\tau) d\tau. \tag{5}$$

Отмечу, что $u(\cdot)$ – это вектор-функция

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}.$$

Интеграл ее мы понимаем как интеграл от каждой компоненты, а 0 – как вектор, состоящий из n нулей.

В качестве тестовой функции рассмотрим функцию

$$x_\alpha(t) = x_*(t) + \alpha y(t, u(\cdot)). \tag{6}$$

Отметим, что $x_\alpha(\cdot)$ допустимая функция. В самом деле, из определения $y(t, u(\cdot))$ (см (5)) имеем, что $y(t^0, u(\cdot)) = 0$ (в силу того, что $y(t, u(\cdot))$ определяется как интеграл от $u(\cdot)$). Тогда

$$x_\alpha(t^0) = x_*(t^0) + \alpha y(t^0, u(\cdot)) = x_*(t^0) = x^0.$$

Также $y(t^1, u(\cdot)) = 0$ (так как интеграл по отрезку $[t^0, t^1]$ от функции $u(\cdot)$ равен 0),

$$x_\alpha(t^1) = x_*(t^1) + \alpha y(t^1, u(\cdot)) = x^1.$$

Теперь покажем, что при достаточно малых α функция $x_\alpha(\cdot)$ близка к функции $x_*(\cdot)$ в метрике ρ_1. В самом деле найдем $\|\dot{x}_\alpha(t) - \dot{x}_*(t)\|$. Для этого продифференцируем выражение для $x_\alpha(t)$ (см. (6)). Имеем, что

$$\|\dot{x}_\alpha(t) - \dot{x}_*(t)\| = \|\dot{x}_*(t) + \alpha \dot{y}(t, u(\cdot)) - \dot{x}_*(t)\| = \alpha \|u(t)\|.$$

Как видно, при достаточна малых α $\|\dot{x}_\alpha(t) - \dot{x}_*(t)\|$ будет меньше ε. Мы показали близость производных, надо показать еще близость значений.

$$\|x_\alpha(t) - x_*(t)\| = \|x_*(t) + \alpha y(t, u(\cdot)) - x_*(t)\| = \alpha \|y(t, u(\cdot))\|.$$

Также можно выбрать α так, чтобы $\alpha\|y(t, u(\cdot))\|$ стало меньше ε.

Теперь подставим $x_\alpha(\cdot)$ в определение слабого экстремума. При подстановке получаем, что

$$\int_{t^0}^{t^1} F(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))dt \leq \int_{t^0}^{t^1} F(t, x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t))dt.$$

Из определения $x_\alpha(\cdot)$ следует, что при $\alpha = 0$ $x_\alpha(\cdot) = x_*(\cdot)$. То есть, если мы рассмотрим функцию

$$g(\alpha) = \int_{t^0}^{t^1} F(t, x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)),$$

то для нее $\alpha = 0$ является точкой локального минимума, т. е. $g(0) \leq g(\alpha)$ при достаточно малых α. Воспользуемся принципом Ферма. Раз $\alpha = 0$ доставляет $g(\alpha)$ локальный минимум, имеем, что

$$\frac{dg(0)}{d\alpha} = 0.$$

Найдем производную функции $g(\alpha)$ при $\alpha = 0$. Нам нужно продифференцировать интеграл в случае, когда подынтегральная функция зависит от параметра. Результат – интеграл, от производной подынтегральной функции по параметру.

$$0 = \frac{dg(\alpha)}{d\alpha} =$$
$$= \int_{t^0}^{t^1} \left[F_x(t, x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)) \cdot \frac{\partial x_\alpha(t)}{\partial \alpha} + F_{\dot{x}}(t, x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)) \cdot \frac{\partial \dot{x}_\alpha(t)}{\partial \alpha} \right] \Bigg|_{\alpha=0} dt.$$

По определению $x_\alpha(\cdot)$ имеем, что

$$\left. \frac{\partial x_\alpha(t)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = y(t, u(\cdot)), \quad \left. \frac{\partial \dot{x}_\alpha(t)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = u(t).$$

Тогда

$$0 = \int_{t^0}^{t^1} \left[F_x(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) \cdot y(t, u(\cdot)) + F_{\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) \cdot u(t) \right] dt.$$

Дальше мы проведем некоторые преобразования. Для упрощения обозначим

$$F_x^*(t) = F_x(t, x(t), \dot{x}_*(t)), \quad F_{\dot{x}}^*(t) = F_{\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)). \tag{7}$$

Заметим, что $F_x^*(t)$ и $F_{\dot{x}}^*(t)$ – ковекторы, то есть вектор-строки.

Имеем, что

$$0 = \int_{t^0}^{t^1} [F_x^*(t) \cdot y(t, u(\cdot)) + F_{\dot{x}}^*(t) \cdot u(t)] dt. \tag{8}$$

Положим,

$$p_0(t) = \int_{t^1}^{t} F_x^*(t) dt.$$

По свойствам интеграла с переменным верхним пределом

$$p_0(t_1) = 0, \quad \dot{p}_0(t) = F_x^*(t).$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое в правой части равенства (8). Воспользуемся методом интегрирования по частям и определением функции $p_0(t)$.

$$\int_{t^0}^{t^1} F_x^*(t)\cdot y(t,u(\cdot))dt =$$

$$= p_0(t^1)\cdot y(t^1,u(\cdot)) - p_0(t^0)\cdot y(t^0,u(\cdot)) - \int_{t^0}^{t^1} p_0(t)\cdot u(t)dt =$$

$$= -\int_{t^0}^{t^1} p_0(t)\cdot u(t)dt.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $p_0(t^1)=0$, $y(t^0,u(\cdot))=0$, $\dot{y}(t,u(\cdot)) = = u(t)$. Следовательно, равенство (8) преобразуется к виду

$$0 = \int_{t^0}^{t^1} (-p_0(t) + F_{\dot{x}}^*(t))u(t)dt. \tag{9}$$

Если мы вспомним утверждение теоремы, то убедимся, что правая часть уравнения Эйлера–Лагранжа (см. (4)) является производной от функции $p_0(t) - F_{\dot{x}}^*(t)$. И для того чтобы доказать справедливость уравнения Эйлера–Лагранжа, достаточно доказать, что $-p_0(t) + F_{\dot{x}}^*(t)$ равна константе на $[t^0,t^1]$. Для этого у нас есть функция $u(\cdot)$.

Эта функция удовлетворяет условию

$$\int_{t^0}^{t^1} u(t)dt = 0.$$

Это равенство n-мерных векторов. Домножим (в смысле скалярного произведения) это равенство на произвольный ковектор $s=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$. Получаем, что

$$\int_{t^0}^{t^1} su(t)dt = 0. \tag{10}$$

Сложим равенства (20) и (10). Получаем, что для всех функций u, интеграл которых равен 0 и всех ковекторов s, верно равенство

$$0 = \int_{t^0}^{t^1} (-p_0(t) + F_{\dot{x}}^*(t) + s)u(t)dt. \tag{11}$$

Выберем ковектор s равным

$$s = \frac{-1}{t^1-t^0}\int_{t^0}^{t^1} [-p_0(t) + F_{\dot{x}}^*(t)]dt.$$

Из этого выбора следует, что

$$\int_{t^0}^{t^1} [-p_0(t) + F_{\dot{x}}^*(t) + s]dt = 0. \tag{12}$$

Здесь 0 – ковекторный 0. Положим,

$$u_*(t) = [-p_0(t) + F_{\dot{x}}^*(t) + s]^T.$$

В силу (12) интеграл от $u_*(\cdot)$ равен 0. Следовательно,

$$\int_{t^0}^{t^1} (-p_0(t) + F_{\dot{x}}^*(t) + s)(p_0(t) + F_{\dot{x}}^*(t) + s)^T dt = 0.$$

Если интеграл от неотрицательной функции равен 0, то и подынтегральная функция равна 0.

$$(-p_0(t) + F_{\dot{x}}^*(t) + s)(-p_0(t) + F_{\dot{x}}^*(t) + s)^T = 0, \quad \text{для всех } t \in [t^0, t^1].$$

Если равен 0 квадрат вектора (ковектора), сам вектор (ковектор) тоже равен нулю

$$-p_0(t) + F_{\dot{x}}^*(t) + s = 0 \;\; \text{для всех } t \in [t^0, t^1].$$

Продифференцируем это тождество по t. Поскольку $\dot{p}_0(t) = F_x^*(t)$, мы получаем, что

$$-F_x^*(t) + \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}^*(t) = 0.$$

Теперь вспомним, что стоит за нашими обозначениями и домножим получившееся равенство на -1. Имеем, что

$$F_x(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}_*(t)) = 0.$$

Мы получили уравнение (4) – уравнение Эйлера–Лагранжа.

□

Любая функция, удовлетворяющая уравнению Эйлера–Лагранжа и краевым условиям, называется *экстремалью*. В заключение этого раздела отметим еще раз, что уравнение Эйлера–Лагранжа – необходимое условие, и экстремали не обязательно являются оптимальными функциями в исходной задаче. Общая идея применения уравнения Эйлера–Лагранжа следующая.

1. Найти общее решение уравнения (4); оно зависит от $2n$ произвольных постоянных (в общем случае).

2. Подставить найденное общее решение уравнения (4) в граничные условия и определить возможные значения произвольных постоянных.

3. Попытаться выяснить, что достигается на найденных кривых (минимум, максимум или просто посторонние функции).

4. Интегралы решения уравнения Эйлера–Лагранжа

В некоторых частных случаях удается упростить уравнение Эйлера–Лагранжа и найти функцию, которая не изменяется вдоль экстремали – первый интеграл. Как мы знаем из курса дифференциальных уравнений, система из $2n$ первых интегралов задает решение в неявной форме (это связано с тем, что в n-мерном случае уравнение Эйлера–Лагранжа – это система n-уравнений второй степени).

4.1. Вырожденный случай $F = F(t, x)$

То есть функция F не зависит от $\dot{x}(t)$.

В этом случае уравнение Эйлера–Лагранжа принимает вид

$$F_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0.$$

А граничных условий – два! Следовательно, в общем случае удовлетворить им невозможно. Экстремум достигается в каких-то исключительных случаях, когда решение задачи Коши для такого вырожденного уравнения Эйлера–Лагранжа при условии $x(t^0) = x^0$ проходит через точку (t^1, x^1).

4.2. F зависит лишь от t и $\dot{x}$

В этом случае

$$F_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0.$$

Следовательно, уравнение Эйлера–Лагранжа принимает вид

$$-\frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, \dot{x}(t)) = 0.$$

Тогда
$$F_{\dot{x}}(t, \dot{x}(t)) = C^1.$$

Нами найден один первый интеграл. Так как последнее уравнение не зависит от x, то его можно проинтегрировать.

4.3. F не зависит от t

В этом случае уравнения Эйлера–Лагранжа на первый взгляд не упрощаются
$$F_x(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) = 0.$$
Найдем производную по t. Получаем, что уравнение при таком переписывании имеет вид
$$F_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) - F_{xx}(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) - F_{x\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))\ddot{x}(t) = 0.$$
Умножим это уравнение на $\dot{x}$. Получаем, что
$$F_x(x(t), \dot{x}(t))\dot{x} - F_{xx}(x(t), \dot{x}(t))(\dot{x}(t))^2 - F_{x\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t)\ddot{x}(t) = 0.$$
Выражение, которое стоит в левой части, равно
$$\frac{d}{dt}\left(F(x(t), \dot{x}(t)) - F_x(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t)\right).$$
В этом легко убедиться, непосредственно вычислив производную.

Тогда уравнение Эйлера–Лагранжа имеет первый интеграл
$$F(x(t), \dot{x}(t)) - F_x(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) = C^1.$$
Дальше мы либо разрешим это выражение относительно $\dot{x}(t)$, либо введем параметр и (может быть) сможем решить в явном виде.

5. Примеры

В рассматриваемых ниже примерах мы найдем только экстремали, проверка, действительно ли экстремали оптимальны, будет проведена позднее.

1. Рассмотрим функционал

$$J_1[x(\cdot)] = \int_0^{\pi/2} [(\dot{x}(t))^2 - (x(t))^2]dt,$$

при условиях $x(0) = 0$, $x(\pi/2){=}1$.

Уравнение Эйлера–Лагранжа имеет в этом случае вид

$$-2x(t) - \frac{d}{dt}(2\dot{x}(t)) = 0.$$

Или

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0.$$

Его решение $x = C^1 \sin t + C^2 \cos t$. Определим константы из краевых условий.

$$0 = x(0) = C^2,$$
$$1 = x(1) = C^1.$$

Следовательно, экстремум может достигаться только на функции $x_*(t) = \sin t$.

2. Найти экстремали функционала

$$J_1[x(\cdot)] = \int_0^1 [(\dot{x}(t))^2 + 12tx(t)]dt$$

при условиях $x(0) = 0$, $x(1) = 1$. Уравнение Эйлера–Лагранжа в этом случае принимает вид

$$12t - \frac{d}{dt}2\dot{x}(t) = 0.$$

Что дает

$$\ddot{x}(t) = 6t.$$

Решение этого уравнения

$$x(t) = t^3 + C^1 t + C^2.$$

Найдем константы, подставляя в краевые условия. Получаем, что

$$0 = x(0) = C^2,$$

$$1 = x(1) = 1 + C^1 t \quad \Rightarrow C^1 = 0.$$

Экстремаль единственна, это функция $x(t) = t^3$.

3. Рассмотрим *задачу о наименьшей поверхности вращения.* А именно, пусть есть две точки (t^0, x^0), (t^1, x^1). Надо провести кривую $x(\cdot)$, проходящую через эти точки так, чтобы при ее вращении получившаяся поверхность была минимальной площади.

   Пусть нам дана произвольная функция $x(\cdot)$. Тогда, как известно из предыдущих курсов, площадь поверхности вращения равна

$$S(x(\cdot)) = 2\pi \int_{t^0}^{t^1} x(t)\sqrt{1+(\dot{x}(t))^2}dt.$$

   При этом нельзя забывать о граничных условиях $x(t^0) = x^1$, $x(t^1) = x^1$.

   Как мы видим, F не зависит от t. Тогда воспользуемся найденным выше первым интегралом

$$x(t)\sqrt{1+(\dot{x}(t))^2} - \frac{x(t)(\dot{x}(t))^2}{\sqrt{1+(\dot{x}(t))^2}} = C^1.$$

   Приведем к общему знаменателю, упростим и получим, что

$$\frac{x(t)}{\sqrt{1+(\dot{x}(t))^2}} = C^1.$$

   Для того чтобы проинтегрировать это уравнение, введем параметр, $\dot{x}(t) = \operatorname{sh} s$. Напомню, что

$$\operatorname{sh} s = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} s = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}' s = \operatorname{ch} s, \quad \operatorname{ch}' s = \operatorname{sh} s.$$

   Подстановка дает, что

$$x(t) = C^1 \operatorname{ch} s.$$

   Теперь найдем dt/ds.

$$\frac{dt}{ds} = \frac{dx}{ds}(\dot{x}(t))^{-1} = C^1.$$

   Следовательно,

$$t = C^1 s + C^2.$$

В результате мы получаем, что

$$\begin{aligned} t = &\ C^1 s + C^2, \\ x = &\ \ C^1 \operatorname{ch} s. \end{aligned}$$

Выражая s, мы получаем, что

$$x(t) = C^1 \operatorname{ch} \frac{t - C^2}{C^1}.$$

Это семейство цепных линий. Постоянные C^1 и C^2 определяются из условия прохождения через граничные условия.

6. Необходимые условия первого порядка в простейшей задаче вариационного исчисления со свободным правым концом

Теорема 2. *Пусть $x_*(\cdot)$ доставляет слабый локальный экстремум в простейшей задаче вариационного исчисления со свободным правым концом. Тогда выполнены условия:*

1. *Уравнение Эйлера–Лагранжа:*

$$F_x(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) = 0, \tag{13}$$

2. *Условие трансверсальности:*

$$F_{\dot{x}}(t^1, x_*(t^1), \dot{x}_*(t^1)) = -\sigma_x(x_*(t^1)). \tag{14}$$

Доказательство. Доказательство близко к доказательству необходимого условия для простейшей задачи вариационного исчисления для задачи с закрепленными концами. Воспользуемся тем, что для достаточно близких в смысле метрики ρ_1 к $x_*(\cdot)$ функций $x(\cdot)$ верно неравенство

$$J_2[x_*(\cdot)] \leq J_2[x(\cdot)]. \tag{15}$$

Для того чтобы получить необходимое условие слабого экстремума, мы возмутим наше оптимальное движение $x_*(\cdot)$. Возмущение будем определять некоторой вектор-функцией $u(\cdot)$ ($u(t) \in \mathbb{R}^n$). Положим,

$$y(t, u(\cdot)) = \int_{t^0}^{t} u(\tau) d\tau. \tag{16}$$

В качестве тестовой функции рассмотрим функцию

$$x_\alpha(t) = x_*(t) + \alpha y(t, u(\cdot)). \tag{17}$$

Такое возмущение вводилось нами ранее. Мы показывали, что функция x_α допустима. В нашем случае она тоже допустима, поскольку $x_\alpha(t^0) = x_*(t_0) = x^0$. Также было показано, что для любого ε можно выбрать α столь малым, чтобы удовлетворялось условие $\rho_1(x_\alpha(\cdot), x_*(\cdot)) \leq \varepsilon$.

Теперь подставим $x_\alpha(\cdot)$ в неравенство (15). При подстановке получаем, что

$$\int_{t^0}^{t^1} F(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) dt + \sigma(x_*(t^1)) \leq \int_{t^0}^{t^1} F(t, x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)) dt + \sigma(x_\alpha(t^1)).$$

Из определения $x_\alpha(\cdot)$ следует, что при $\alpha = 0$ выполняется равенство $x_\alpha(\cdot) = x_*(\cdot)$. Если мы рассмотрим функцию

$$g(\alpha) = \int_{t^0}^{t^1} F(t, x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)) dt + \sigma(x_\alpha(t^1)),$$

то для нее $\alpha = 0$ является точкой локального минимума: $g(0) \leq g(\alpha)$ при достаточно малых α. Воспользуемся принципом Ферма. Так как $\alpha = 0$ доставляет $g(\alpha)$ локальный минимум имеем, что

$$\frac{dg(0)}{d\alpha} = 0.$$

Найдем производную функции $g(\alpha)$ при $\alpha = 0$.

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dg(\alpha)}{d\alpha} &= \\ = \int_{t^0}^{t^1} &\left[F_x(t, x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)) \cdot \frac{\partial x_\alpha(t)}{\partial \alpha} + F_{\dot{x}}(t, x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)) \cdot \frac{\partial \dot{x}_\alpha(t)}{\partial \alpha} \right] \Bigg|_{\alpha=0} dt + \\ &+ \sigma_x(x_\alpha(t^1)) \cdot \frac{\partial x_\alpha(t^1)}{\partial \alpha} \Bigg|_{\alpha=0}. \end{aligned}$$

По определению $x_\alpha(\cdot)$ имеем, что

$$\left.\frac{\partial x_\alpha(t)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = y(t, u(\cdot)), \quad \left.\frac{\partial \dot{x}_\alpha(t)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = u(t).$$

Тогда

$$0 = \int_{t^0}^{t^1} \left[F_x(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))y(t, u(\cdot)) + F_{\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))u(t)\right] dt+ \\ + \sigma_x(x_*(t^1)) \cdot y(t^1, u(\cdot)).$$

Используя введенные выше обозначения (см. (7)), мы можем переписать это равенство в виде

$$0 = \int_{t^0}^{t^1} [F_x^*(t) \cdot y(t, u(\cdot)) + F_{\dot{x}}^*(t) \cdot u(t)]dt + \sigma_x(x_*(t^1)) \cdot y(t^1, u(\cdot)). \tag{18}$$

Положим,

$$p_0(t) \triangleq \int_{t^1}^{t} F_x^*(t)dt - \sigma_x(x_*(t^1)).$$

Тогда по свойствам интеграла с переменным пределом имеем, что

$$p_0(t^1) = -\sigma_x(x_*(t^1)), \tag{19}$$

$$\dot{p}_0(t) = F_x^*(t).$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое в правой части равенства (18). Воспользуемся методом интегрирования по частям и определением функции $p_0(t)$.

$$\int_{t^0}^{t^1} F_x^*(t) \cdot y(t, u(\cdot))dt = \\ = p_0(t^1) \cdot y(t^1, u(\cdot)) - p_0(t^0) \cdot y(t^0, u(\cdot)) - \int_{t^0}^{t^1} p_0(t) \cdot u(t)dt = \\ = -\sigma_x(x_*(t^1)) \cdot y(t^1, u(\cdot)) - \int_{t^0}^{t^1} p_0(t) \cdot u(t)dt.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $p_0(t^1) = -\sigma_x(x_*(t^1))$, $y(t^0, u(\cdot)) = 0$, $\dot{y}(t, u(\cdot)) = u(t)$. Следовательно, равенство (8) преобразуется к виду

$$0 = \int_{t^0}^{t^1} [-p_0(t) + F^*_{\dot{x}}(t)] \cdot u(t) dt. \tag{20}$$

Выберем $u(t) \triangleq [-p_0(t) + F^*_{\dot{x}}(t)]^T$. Тогда

$$0 = \int_{t^0}^{t^1} [-p_0(t) + F^*_{\dot{x}}(t)]^T [-p_0(t) + F^*_{\dot{x}}(t)] dt.$$

Поскольку подынтегральная функция неотрицательная, а интеграл равен 0, то подынтегральная функция равна нулю тождественно, то есть

$$[-p_0(t) + F^*_{\dot{x}}(t)]^T [-p_0(t) + F^*_{\dot{x}}(t)] = 0.$$

Скалярный квадрат равен нулю тогда и только тогда, когда сама величина равна нулю, т. е.

$$-p_0(t) + F^*_{\dot{x}}(t) = 0. \tag{21}$$

Продифференцировав последнее равенство и воспользовавшись равенством $\dot{p}_0 = F^*_x(t)$, мы получаем уравнение Эйлера–Лагранжа. Также подставив в (21) момент $t = t^1$, мы получаем, что

$$F^*_{\dot{x}}(t^1) = p_0(t^1) = -\sigma_x(x_*(t^1)).$$

□

7. Необходимые условия второго порядка в задаче с закрепленными концами

В данном разделе мы предполагаем, что x – скаляр, т. е. $x \in \mathbb{R}$. Как и выше, мы предполагаем, что $x_*(\cdot)$ является слабым локальным минимумом функционала $J_1[x(\cdot)]$.

Пусть u – некоторая функция такая, что

$$\int_{t^0}^{t^1} u(t) dt = 0.$$

Как и выше, обозначим

$$y(t, u(\cdot)) = \int_{t^0}^{t} u(\tau) d\tau.$$

Ниже мы будем опускать зависимость от $u(\cdot)$. Если α – некоторое число, то, как мы помним, функция

$$g(\alpha) = J_*[x_*(\cdot) + \alpha y(\cdot)]$$

имеет в точке $\alpha = 0$ локальный минимум.

Разложим функцию $g(\alpha)$ в ряд Тейлора. Мы получим, что

$$g(\alpha) = g'(0) + \alpha g'(0) + \frac{\alpha^2}{2} g''(\alpha) + o(\alpha^2).$$

Необходимое условие минимума состоит в том, что $g''(0) \geq 0$. Найдем значение $g''(0)$. Здесь и ниже мы предполагаем, что все производные существуют.

$$g''(0) = \int_{t^0}^{t^1} [A(t)y^2(t) + 2B(t)y(t)\dot{y}(t) + C(t)\dot{y}^2(t)] dt.$$

Здесь

$$A(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)),$$

$$B(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)),$$

$$C(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)).$$

Таким образом нами получено предложение 2.

Предложение 2. *Для того чтобы функция $x_*(\cdot)$ доставляла слабый минимум функционалу J_1, необходимо, чтобы функционал*

$$K[y(\cdot)] = \int_{t^0}^{t^1} [A(t)y^2(t) + 2B(t)y(t)\dot{y}(t) + C(t)\dot{y}^2(t)] dt \tag{22}$$

был положительно определен (т. е. неотрицателен) для любой непрерывно дифференцируемой функции $y(\cdot)$, такой что $y(t^0) = y(t^1) = 0$.

К сожалению, условия предложения 2 очень сложно проверить. Далее мы найдем проверяемую форму условия положительной определенности.

Прежде всего отметим, что при $y(t^0) = y(t^1) = 0$ метод интегрирования по частям дает формулу

$$\int_{t^0}^{t^1} 2B(t)y(t)\dot{y}(t)dt = \int_{t^0}^{t^1} -\frac{dB(t)}{dt}y^2(t)dt.$$

Таким образом,

$$K[y(\cdot)] = \int_{t^0}^{t^1} [D(t)y^2(t) + C(t)\dot{y}^2(t)]dt.$$

Здесь введено еще одно обозначение

$$D(t) = A(t) - \frac{dB(t)}{dt}.$$

Теорема 3 (Лежандр). *Для того чтобы функционал $J_1[x(\cdot)]$ достигал на $x_*(\cdot)$ минимума, необходимо, чтобы*

$$F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) \geq 0.$$

Доказательство. Заметим, что мы должны доказать следующее условие. Если функционал $K[y(\cdot)]$ положительно определен, то $C(t) \geq 0$.

Проведем доказательство от противного, пусть в некоторой точке θ $C(\theta) < 0$. Пусть $y_\varepsilon(\cdot)$ таково, что

1. $y_\varepsilon(t)$ равно 0 вне интервала $(\theta - 2\varepsilon, \theta + 2\varepsilon)$;

2. $|y_\varepsilon(t)| < \varepsilon$ для всех t;

3. $|\dot{y}_\varepsilon(t)| > \frac{1}{\varepsilon}$ на интервале $(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon)$.

Тогда мы получаем, что

$$K[y_\varepsilon(\cdot)] \leq \varepsilon^2 \int_{t^0}^{t^1} |D(t)|dt + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} C(t)dt \to -\infty, \quad \varepsilon \to 0.$$

Это противоречит положительной определенности функционала K. $\square$

Замечание. Для того чтобы функция $x_*(\cdot)$ доставляла максимум функционала J_1, необходимо, чтобы

1. $K[y(\cdot)]$ было отрицательно определено;

2. $F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) \leq 0$.

Определение 3. Будем говорить, что точка θ является сопряженной к точке t^0, если существует не равное тождественно 0 решение дифференциального уравнения

$$D(t)y(t) - \frac{d}{dt}(C(t)\dot{y}(t)) = 0, \tag{23}$$

удовлетворяющее условию $y(t^0) = y(\theta) = 0$.

Уравнение (23) называется уравнением Якоби. Оно является уравнением Эйлера для функционала K. Уравнение Якоби можно переписать в эквивалентной форме

$$A(t)y(t) + B(t)\dot{y}(t) - \frac{d}{dt}(B(t)y(t) + C(t)\dot{y}(t)) = 0. \tag{24}$$

Для того чтобы показать эквивалентность уравнений (23) и (24), достаточно заметить, что

$$\frac{d}{dt}(B(t)y(t)) = \frac{dB(t)}{dt}y(t) + B(t)\dot{y}(t) \text{ и } D(t) = A(t) - \frac{dB(t)}{dt}.$$

Далее мы будем говорить что функционал $K[y(\cdot)]$ *строго положительно определен*, если $K[y(\cdot)] > 0$ для всех $y(\cdot)$, отличных от тождественного 0.

Теорема 4. *Если отрезок $[t^0, t^1]$ не содержит сопряженных (относительно функционала K) точек к t^0 и $C(t) > 0$, то функционал $K[y(\cdot)]$ строго положительно определен для всех y таких, что $y(t^0) = y(t^1) = 0$.*

Доказательство. Для того чтобы показать строгую положительно определенность функционала K, приведем его к виду

$$K[y(\cdot)] = \int_{t^0}^{t^1} C(t)\dot{z}^2(t)dt.$$

Для этого мы к функционалу K прибавим величину

$$\int_{t^0}^{t^1} d(w(t)y^2(t)),$$

где $w(\cdot)$ – некоторая (дифференцируемая) функция. Имеем, что

$$\int_{t^0}^{t^1} d(w(t)y^2(t)) = w(t)y^2(t)\Big|_{t^0}^{t^1} = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{t^0}^{t^1} [(D(t) + \dot{w}(t))y^2(t) + C(t)\dot{y}^2(t) + 2w(t)y(t)\dot{y}(t)]dt.$$

$$K[y(\cdot)] = \int_{t^0}^{t^1} (C(t)\dot{z}^2(t)dt.$$

Выберем функцию w так, чтобы подынтегральное выражение

$$(D(t) + \dot{w}(t))y^2(t) + C(t)\dot{y}^2 + 2w(t)y(t)\dot{y}(t)$$

было полным квадратом. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$C(t)(D(t) + \dot{w}) = w^2. \tag{25}$$

Если это условие выполнено, то функционал K может быть приведен к виду

$$K[y(\cdot)] = \int_{t^0}^{t^1} C(t)\left[\dot{y}(t) + \frac{w(t)}{P(t)}y(t)\right]^2 dt.$$

Покажем, что уравнение (25) имеет решение. Это уравнение называется уравнением Рикатти. Оно приводится к дифференциальному уравнению второго порядка заменой

$$w = -\frac{\dot{b}}{b}C(t).$$

В результате уравнение (25) принимает вид

$$D(t)b(t) - \frac{d}{dt}(C(t)\dot{b}(t)) = 0. \tag{26}$$

Это уравнение Якоби (23). По условию отрезок $[t^0, t^1]$ не содержит сопряженных к t^0 точек. Можно «сдвинуть» начальную точку на малое ε; т. е. мы ищем решение b_ε уравнения (26) с начальными условиями $b_\varepsilon(t^0-\varepsilon) = 0$, $\dot{b}_\varepsilon(t^0 - \varepsilon) = 1$. Так как решение дифференциального уравнения (26) непрерывно зависит от параметра, мы получаем, что существует функция b_ε, отличная от нуля на отрезке $[t^0, t^1]$. Следовательно, существует функция w, удовлетворяющая уравнению (25).

Вернемся к изучению функционала K. Функция $y(\cdot)$, обращающая в ноль функционал K, удовлетворяет уравнению Якоби (23). Кроме этого, поскольку $C(t) > 0$, $y(\cdot)$ должно удовлетворять уравнению

$$\dot{y}(t) + \frac{w(t)}{C(t)} y(t) = 0.$$

Отсюда, подставив $t = t^0$, в силу предположения $y(t^0) = 0$ получаем, что $\dot{y}(t^0) = 0$. По теореме существования и единственности решения дифференциального уравнения Якоби (23) мы получаем, что $y(\cdot) \equiv 0$. Откуда следует, что $K[y(\cdot)] > 0$ для всех $y(\cdot) \neq 0$.

$\square$

Теорема 5 (Условие Якоби). *Если x_* доставляет слабый локальный минимум функционалу J_1 и $C(t) > 0$, то отрезок $[t^0, t^1]$ не содержит сопряженных точек.*

Замечание. Фактически будет доказано, что если $x_*(\cdot)$ доставляет слабый локальный минимум функционалу J_1 и $C(t) > 0$, то любое решение уравнения (23) удовлетворяющее условиям $y(t^0) = 0$, $\dot{y}(t^0) = 1$, не обращается в ноль на полуинтервале $(t^0, t^1]$. Это условие может быть взято в качестве определения сопряженной точки.

Замечание. В условиях теоремы минимум может быть заменен на максимум, при этом условие $C(t) > 0$ должно быть заменено на условие $C(t) < 0$.

Прежде чем мы перейдем к доказательству теоремы, получим вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если $y(\cdot)$ является решением уравнения*

$$Q(t)y(t) - \frac{d}{dt}(P(t)\dot{y}(t)) = 0$$

и удовлетворяет условиям $y(t^0) = y(t^1) = 0$, то для этого $y(\cdot)$ выполнено равенство

$$\int_{t^0}^{t^1} (Q(t)y^2 + P(t)\dot{y}^2(t))dt = 0.$$

Доказательство. В самом деле

$$0 = \int_{t^0}^{t^1} \left(Q(t)y(t) - \frac{d}{dt}(P(t)\dot{y}(t)) \right) y(t)dt = 0.$$

Также с учетом граничных условий имеем

$$\int_{t^0}^{t^1} (-\frac{d}{dt}(P(t)\dot{y}(t)))y(t)dt = \int_{t^0}^{t^1} P(t)\dot{y}^2(t)dt.$$

□

Доказательство теоремы 5. Мы докажем, что если функционал $K[y(\cdot)]$ положительно определен, то любое решение уравнения Якоби (23), отличное от тождественного 0, не может обращаться в 0 одновременно в точке t^0 и $\theta \in [t^0, t^1]$. Доказательство будет вестись от противного, т. е. мы предполагаем, что существует такая точка $\theta \in (t^0, t^1]$, что $y(\theta) = 0$, однако $y(\cdot)$ как функция отлична от 0. Можно считать (умножив $y(\cdot)$ на соответствующую константу), что $\dot{y}(t^0) = 1$. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы рассмотреть выпуклую комбинацию функционала K и функционала

$$\int_{t^0}^{t^1} \dot{y}^2 dt,$$

у которого нет сопряженных точек.

Если функционал

$$K[y(\cdot)] = \int_{t^0}^{t^1} (D(t)y^2(t) + C(t)\dot{y}^2(t))dt$$

положительно определен, и $C(t) > 0$, то $K[y(\cdot)]$ строго положительно определен (т. е. значение $K[y(\cdot)] > 0$ для всех $y(\cdot)$ отличных от тождественного 0). А значит для $r = [0, 1]$ строго положительно определен и функционал

$$K_r[y(\cdot)] = \int_{t^0}^{t^1} [r(D(t)y^2(t) + C(t)\dot{y}^2(t)) + (1-r)\dot{y}^2(t)]dt.$$

Рассмотрим уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала K_r. Мы получим, что

$$-\frac{d}{dt}[(rD(t)+(1-r))\dot{y}(t)]+C(t)y(t)=0. \tag{27}$$

Пусть $y(\cdot,r)$ решение этого уравнения такое, что $y(t^0,r)=0$, $\dot{y}(t^0,r)=1$. Функция $y(\cdot,r)$ зависит от r непрерывным образом. Заметим, что при $r=1$ $y(\cdot,r)$ является решением уравнения (23), а при $r=0$ $y(t,0)$ равно $t-t^0$.

Также если в некоторой точке τ имеет место равенство $y(\tau,r)=0$, то $\dot{y}(\tau,r)\neq 0$. В самом деле, если $\dot{y}(\tau,r)=0$, то по теореме существования и единственности решения дифференциального уравнения единственное решение уравнения (27), удовлетворяющее этим условиям, – функция $y(\cdot,r)\equiv 0$, что противоречит условиям в точке t^0.

Рассмотрим множество точек (t,r) таких, что $y(t,r)=0$. Это кривая. В самом деле, если $y(t,r)=0$, то поскольку $\dot{y}(t,r)=\frac{\partial}{\partial t}y(t,r)\neq 0$, то по теореме о неявной функции условие $y(t,r)$ определяет непрерывную функцию $r=r(t)$ локально.

На этой кривой лежит точка $(\theta,1)$, здесь θ – сопряженная точка, существование которой мы предположили выше. Точка $(\theta,1)$ лежит на границе прямоугольника $[t^0,t^1]\times[0,1]$.

Заметим, что

1. Кривая $y(t,r)=0$ не может закончиться внутри прямоугольника $[t^0,t^1]\times[0,1]$, иначе мы получили бы противоречие с теоремой о неявной функции.

2. Не может пересечь границу $t=t^1$. Если для некоторого r $y(t^1,r)=0$, то по лемме 1 мы получаем, что функционал $K_r[y(\cdot,r)]=0$. Это противоречит положительной определенности функционала K_r.

3. Не может пересечь границу $r=1$, так как в этом случае существует такой момент τ, что $r(\theta)=r(\tau)$, и по теореме Ролля $\frac{dr}{dt}(\tilde{t})=0$ для некоторой точки $\tilde{t}$, а так как

$$\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{dr}{dt}=0, \tag{28}$$

в точке $\tilde{r}$, $\tilde{t}=r(\tilde{t})$ $\dot{y}(\tilde{t},\tilde{r})=0$.

4. Не может пересечь сторону $r = 0$, так как в этом случае уравнение (27) сводится к уравнению $\ddot{y} = 0$, единственное решение которого $y = t - t^0$, чья производная в ноль не обращается.

5. Не может пересекать сторону $t = t^0$. В самом деле, мы имеем, что
$$\frac{\partial y(t^0, r)}{\partial r} = 0.$$
Поскольку равенство (28) выполнено вдоль кривой $y(t, r) = 0$, мы получаем, что
$$\dot{y}(t^0, r) = \frac{\partial y(t^0, r)}{\partial t} = 0$$
для r такого, что $y(t^0, r) = 0$. Это противоречит выбору условия $\dot{y}(t^0, r) = 1$.

Суммируя пункты 1–5, мы получаем, что кривая $y(t, r) = 0$, такая, что на ней лежит точка $(\theta, 1)$, не может оборваться внутри прямоугольника $[t^0, t^1] \times [0, 1]$ и не может пересечь ни одной стороны. Такой кривой просто не существует. Следовательно, не может существовать такого момента θ, что решение уравнения (23) $y(\cdot)$, $y(t^0) = 0$, $\dot{y}(t^0) = 1$, равно 0 при $t = \theta$.

$\square$

8. Достаточные условия в задаче с закрепленным правым концом в скалярном случае

Как и выше, мы предполагаем, что x – скаляр.

Теорема 6. *Пусть функция $x_*(\cdot)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *$x_*(\cdot)$ – решение уравнение Эйлера–Лагранжа;*

2. *Если $C(t) = F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))$, $B(t) = F_{x\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))$, $A(t) = F_{xx}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))$, то отрезок $[t^0, t^1]$ не содержит сопряженных точек.*

3. *$C(t) > 0$.*

Тогда $x_*(\cdot)$ доставляет слабый экстремум функционалу J_1.

Замечание. Для того чтобы $x_*(\cdot)$ доставляла слабый максимум, достаточно выполнения условий 1 и 2, а также условия $C(t) < 0$.

Доказательство теоремы 6. Поскольку отрезок $[t^0, t^1]$ не содержит сопряженных точек и $C(t) > 0$, получаем, что существует такое $\varepsilon > 0$, что отрезок $[t^0, t^1 + \varepsilon]$ не содержит сопряженных точек.

Немного модифицируем функционал K и рассмотрим задачу минимизации функционала

$$K^\alpha[y(\cdot)] = \int_{t^0}^{t^1} [D(t)y^2(t) + (C(t) - \alpha^2)\dot{y}^2(t)]dt.$$

Напомним, что D определено равенством

$$D(t) = A(t) - \frac{d}{dt}B(t).$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала K^α (уравнение Якоби) в этом случае имеет следующий вид

$$D(t)y(t) - \frac{d}{dt}[(C(t) - \alpha^2)\dot{y}(t)] = 0. \tag{29}$$

Поскольку $C(t) > 0$, то для достаточно малых α $C(t) - \alpha^2 > 0$ для $t \in [t^0, t^1]$.

Также из непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения (29) следует, что решение этого дифференциального уравнения $y^\alpha(\cdot)$, удовлетворяющее условиям $y^\alpha(t^0) = 0$, $\dot{y}^\alpha(t^0) = 1$, не пересекает 0 при достаточно малых α. По теореме 4 мы получаем, что функционал K^α положительно определен, т. е. выполнено неравенство

$$\int_{t^0}^{t^1} [D(t)y^2(t) + C(t)\dot{y}^2(t)]dt \geq \alpha^2 \int_{t^0}^{t^1} \dot{y}^2 dt. \tag{30}$$

Используя формулу Тейлора и уравнение Эйлера–Лагранжа, мы получаем, что для любой функции $y(\cdot)$ такой, что $y(t^0) = y(t^1) = 0$ справедливо равенство

$$J_1[x_*(\cdot)+y(\cdot)]-J_1[x_*(\cdot)]=\frac{1}{2}\int_{t^0}^{t^1}(A(t)y^2(t)+2B(t)y(t)\dot{y}(t)+C(t)\dot{y}^2(t))dt+$$
$$+\int_{t^0}^{t^1}(\varepsilon_1(t)y^2(t)+\varepsilon_2(t)y(t)\dot{y}(t)+\varepsilon_3(t)\dot{y}^2(t))dt.$$

Здесь функции ε_1, ε_2 и ε_3 равномерно ограничены и

$$\max_{t\in[t^0,t^1]}|\varepsilon_i(t)|\to 0,\ \text{при}\ \|y(\cdot)\|=\max_{t\in[t^0,t^1]}|y(t)|+\max_{t\in[t^0,t^1]}|\dot{y}(t)|\to 0.$$

Используя интегрирование по частям и условие на функцию $y(\cdot)$, мы получаем, что

$$J_1[x_*(\cdot)+y(\cdot)]-J_1[x_*(\cdot)]=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{t^0}^{t^1}(D(t)y^2(t)+C(t)\dot{y}^2(t))dt+\int_{t^0}^{t^1}(\xi(t)y^2(t)+\eta(t)\dot{y}^2(t))dt.$$

Отметим, что

$$\max_{t\in[t^0,t^1]}|\xi(t)|,\ \max_{t\in[t^0,t^1]}|\eta(t)|\to 0,$$
$$\text{при}\ \|y(\cdot)\|=\max_{t\in[t^0,t^1]}|y(t)|+\max_{t\in[t^0,t^1]}|\dot{y}(t)|\to 0.$$

Оценим $y^2(t)$. Имеем, что

$$y^2(t)=\left(\int_{t^0}^{t}\dot{y}(\tau)d\tau\right)^2.$$

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$\left(\int_{t^0}^{t^1}\dot{y}(\tau)d\tau\right)^2\le\int_{t^0}^{t}dt\cdot\int_{t^0}^{t}\dot{y}^2(\tau)d\tau\le(t-t^0)\int_{t^0}^{t^1}\dot{y}^2(\tau)d\tau.$$

Таким образом,

$$\int_{t^0}^{t^1}y^2(t)\le\frac{(t^1-t^0)^2}{2}\int_{t^0}^{t^1}\dot{y}^2(t)dt.$$

Если $|\xi(t)| \leq \varepsilon$, $|\eta(t)| < \varepsilon$, то

$$\left| \int_{t^0}^{t^1} (\xi(t) y^2(t) + \eta(t) \dot{y}^2(t)) dt \right| < \varepsilon \left(1 + \frac{(t^1 - t^0)^2}{2} \right) \int_{t^0}^{t^1} \dot{y}^2(t) dt.$$

Величину ε можно выбрать произвольно малой при соответствующем выборе $\|y(\cdot)\|$. Тогда мы имеем, что

$$\begin{aligned} & J_1[x_*(\cdot) + y(\cdot)] - J_1[x_*(\cdot)] = \\ & \quad = \frac{1}{2} \int_{t^0}^{t^1} (D(t) y^2(t) + C(t) \dot{y}^2(t)) dt + \int_{t^0}^{t^1} (\xi(t) y^2(t) + \eta(t) \dot{y}^2(t)) dt \geq \\ & \quad \geq \frac{1}{2} \int_{t^0}^{t^1} (D(t) y^2(t) + C(t) \dot{y}^2(t)) dt - \varepsilon \left(1 + \frac{(t^1 - t^0)^2}{2} \right) \int_{t^0}^{t^1} \dot{y}^2(t) dt > 0. \end{aligned}$$

$\square$

В заключение данного раздела рассмотрим пример. В разделе 5. первый пример был такой: найти экстремум функционала

$$J_1(x(\cdot)) = \int_0^{\pi/2} [(\dot{x}(t))^2 - (x(t))^2] dt,$$

при условиях $x(0) = 0$, $x(\pi/2)$=1. Мы нашли, что единственным решением уравнения Эйлера–Лагранжа является функция $x_*(t) \sin(t)$. Проверим, выполнены ли достаточные условия. В нашем случае $A(t) = -2$, $B(t) = 0$, $C(t) = 2$. Уравнение Якоби (24) имеет вид

$$-2y(t) - 2\frac{d}{dt}\dot{y}(t) = 0.$$

Его решение при условиях $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$ – функция $y(t) = \sin t$. Она равна 0 на полуинтервале $(0, \pi/2]$. Следовательно, условие Якоби выполнено.

Также $C(t) = 2 > 0$. По теореме о достаточных условиях в задаче с закрепленными концами (6) заключаем, что $x_*(t) = \sin(t)$ доставляет слабый минимум.

В качестве упражнения – проверка достаточных условий для других примеров из раздела 5. – оставляется читателю.

9. Элементы теории поля

Этот параграф содержит условие, которое будет использовано при доказательстве достаточных условий слабого и сильного экстремума в векторном случае.

Определение 4. Пусть задано семейство функций $x(\cdot, \varkappa)$, $\varkappa \in \mathcal{A}$. И пусть Δ – некоторое множество в $[t^0, t^1] \times \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что семейство $x(\cdot, \varkappa)$ образует поле в Δ, если через каждую точку $(t_*, x_*) \in \Delta$ проходит единственная функция $x(\cdot, \varkappa)$.

Будем говорить, что кривая $x_*(\cdot)$ может быть окружена центральным полем, если

1. существует такое $\varkappa_*$, что $x_*(\cdot) = x(t, \varkappa_*)$;

2. можно выбрать Δ и множество параметров $\mathcal{A}$ так, что $(t^0, x^0) \in \Delta$, для всех остальных $t \in [t^0, t^1]$ сечение Δ по t телесно, и $x(\cdot, \varkappa)$ при $C \in \mathcal{A}$.

Нас будет интересовать поле экстремалей. Мы предполагаем, что $x(\cdot, \varkappa)$ – есть решение задачи Коши для уравнения Эйлера–Лагранжа (см. (4))

$$F_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad x(t^0) = x^0, \quad \dot{x}(t^0) = \varkappa. \qquad (31)$$

Пусть $x_*(\cdot)$ является решением уравнения (4) при граничных условиях $x(t^0) = x^0$, $x(t^1) = x^1$. Существует такое $\varkappa_*$, что $x_*(\cdot) = x(\cdot, \varkappa_*)$.

Найдем условие, при котором $x_*(\cdot)$ может быть окружено полем. Если t – некоторый момент времени, ξ – некоторый вектор, достаточно близкий к $x_(t, \varkappa)$, то по теореме о неявной функции достаточным условием разрешимости относительно C уравнения

$$x(t, \varkappa) = \xi$$

является неравенство

$$\det Z_*(t) \triangleq \frac{\partial x(t, \varkappa_*)}{\partial \varkappa} \neq 0. \qquad (32)$$

Поскольку $\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)^T$ – вектор, частная производная $\frac{\partial x(t,\varkappa_*)}{\partial \varkappa}$ – это матрица:

$$\frac{\partial x(t,\varkappa)}{\partial \varkappa} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(t,\varkappa_*)}{\partial \varkappa_1} & \ldots & \frac{\partial x_1(t,\varkappa_*)}{\partial \varkappa_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_n(t,\varkappa_*)}{\partial \varkappa_1} & \ldots & \frac{\partial x_n(t,\varkappa_*)}{\partial \varkappa_n} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что продифференцировав уравнения и начальное условие в (31) по $\varkappa$, мы можем получить уравнение на $y_*(\cdot)$. Выше мы уже рассматривали вторые производные функции F для одномерного случая. Сейчас мы рассматриваем многомерный случай. В связи с этим в данном случае вторые производные, вообще говоря, являются тензорами. Однако мы представим вторые производные в виде матриц.

$$A(t) = \left(\frac{\partial F(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}},$$
$$B(t) = \left(\frac{\partial F(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))}{\partial x_i \partial \dot{x}_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}},$$
$$C(t) = \left(\frac{\partial F(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))}{\partial \dot{x}_i \partial x_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}}.$$

После дифференцирования по $\varkappa$ задача (31) принимает вид

$$A(t)Z(t) + B(t)\dot{Z}_*(t) - \frac{d}{dt}[B(t)Z_*(t) + C(t)\dot{Z}(t)] = 0,$$
$$Z_*(t^0) = 0, \quad \dot{z}_*(t^0) = I. \quad (33)$$

Здесь

$$Z_*(t) = \left.\frac{\partial x(t,\varkappa)}{\partial \varkappa}\right|_{\varkappa=\varkappa_*} \text{ матрица } n \times n,$$

I – единичная матрица

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (33) – уравнение на матричную функцию z.

Таким образом, нами доказано предложение 3.

Предложение 3. *Для того чтобы окружить функцию $x_*(t)$ полем, достаточно того, чтобы решение задачи (33) удовлетворяло условию* $\det Z_*(t) \neq 0$, $t \in [t^0, t^1]$.

Отметим, что в одномерном случае условие того, что $\det Z_*(t) \neq 0$ для $Z_*(\cdot)$ – решение задачи (33), уже появлялось в теореме 5.

10. Достаточные условия в векторном случае

В этом (заключительном) разделе мы изучаем задачу вариационного исчисления с закрепленными границами, она состоит в минимизации (максимизации) функционала J_1. В предыдущих разделах мы нашли необходимое условие слабого экстремума (условие Эйлера–Лагранжа, см. теорему 2). Для одномерного случая необходимым условием является также условие Якоби. В этом разделы мы предполагаем, что

1. $x_*(\cdot)$ – решение уравнения Эйлера–Лагранжа;

2. выполнено условие предложения 3, т. е. если $Z_*(\cdot)$ – решение задачи (33), то $\det Z_*(t) \neq 0$.

Из второго условия следует, что для каждой позиции (τ, ξ), достаточно близкой к позиции $(\tau, x_*(\tau))$, существует и единственна характеристика $x(\cdot, \varkappa)$ такая, что $x(\tau, \varkappa) = \xi$. Соответствующее значение параметра $\varkappa$ обозначим через $\varkappa(\tau, \xi)$.

Имеем, что

$$x(\tau, \varkappa(\tau, \xi)) = \xi. \tag{34}$$

Кроме этого, большую роль будет играть значение производной по t от функции $x(\cdot, \varkappa)$ при $t = \tau$, $\varkappa = \varkappa(\tau, \xi)$, эта величина еще называется *наклоном поля*:

$$u(\tau, \xi) \triangleq \frac{\partial x(t, \varkappa(\tau, \xi))}{\partial t}\bigg|_{t=\tau}. \tag{35}$$

Теперь введем функцию $S(\tau, \xi)$.

$$S(\tau, \xi) = \int_{t^0}^{\tau} F(t, x(t, \varkappa(\tau, \xi)), \dot{x}(t, \varkappa(\tau, \xi)))dt.$$

Эту функцию называют S-функций поля $x(\cdot, \varkappa)$.

Нам от этой функции потребуется значение ее дифференциала. Напомним, что

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial S}{\partial \xi} \cdot d\xi. \tag{36}$$

Найдем частные производные. Ниже функция с нижним индексом означает частную производную по этому индексу, точка означает производную x по t .

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial \tau} &= F(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) + \\ &+ \int_{t^0}^{\tau} \Big[F_x(t,x(t,\varkappa(\tau,\xi)),\dot{x}(t,\varkappa(\tau,\xi))) \cdot x_{\varkappa}(t,\varkappa(\tau,\xi))\varkappa_{\tau}(\tau,\xi) + \\ &+ F_{\dot{x}}(t,x(t,\varkappa(\tau,\xi)),x(t,\varkappa(\tau,\xi))) \cdot \dot{x}_{\varkappa}(t,\varkappa(\tau,\xi))\varkappa_{\tau}(\tau,\xi) \Big] dt. \end{aligned}$$

Проинтегрируем второе слагаемое по частям. Имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial \tau} &= F(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) + \\ &+ \int_{t^0}^{\tau} F_x(t,x(t,\varkappa(\tau,\xi)),\dot{x}(t,\varkappa(\tau,\xi))) \cdot x_{\varkappa}(t,\varkappa(\tau,\xi))\varkappa_{\tau}(\tau,\xi) dt - \\ &- \int_{t^0}^{\tau} \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t,x(t,\varkappa(\tau,\xi)),\dot{x}(t,\varkappa(\tau,\xi))) \cdot x_{\varkappa}(t,\varkappa(\tau,\xi))\varkappa_{\tau}(\tau,\xi) dt + \\ &+ F_{\dot{x}}(t,x(t,\varkappa(\tau,\xi)),\dot{x}(t,\varkappa(\tau,\xi))) \cdot x_{\varkappa}(t,\varkappa(\tau,\xi))\varkappa_{\tau}(\tau,\xi) \Big|_{t^0}^{\tau}. \end{aligned}$$

Воспользуемся уравнением Эйлера–Лагранжа. Это позволит нам понять, что интегральные члены равны нулю. В силу того что через (t^0, x^0) проходят все кривые вида $x(\cdot, \varkappa)$, мы заключаем, что $x_{\varkappa}(t^0, \varkappa) = 0$ для всех $\varkappa$. Тогда мы получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial \tau} &= F(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) + \\ &+ F_{\dot{x}}(\tau,x(\tau,\varkappa(\tau,\xi)),\dot{x}(t,\varkappa(\tau,\xi))) \cdot x_{\varkappa}(t,\varkappa(\tau,\xi))\varkappa_{\tau}(\tau,\xi). \end{aligned} \tag{37}$$

Выразим $x_{\varkappa}(t,\varkappa(\tau,\xi))\varkappa_{\tau}(\tau,\xi)$. Для этого продифференцируем равенство (34) по τ. Получаем, что

$$\dot{x}(\tau,\varkappa(\tau,\xi)) + x_{\varkappa}(\tau,\varkappa(\tau,\xi))\varkappa_{\tau}(\tau,\xi) = 0.$$

Тогда мы можем упростить равенство (37), особенно если воспользуемся определением (35) и равенством (34).

$$\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial \tau} = F(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) - F_{\dot{x}}(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\cdot u(\tau,\xi). \tag{38}$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к формуле для частной производной по ξ. При этом используется равенство, получающиеся дифференцированием уравнения (34) по ξ,

$$x_{\varkappa}(\tau,\varkappa(\tau,\xi)) = I.$$

Сама формула имеет вид

$$\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial \xi} = F_{\dot{x}}(\tau,\xi,u(\tau,\xi)). \tag{39}$$

Подставляя выражения (38) и (39) в (36), получаем окончательное выражение для дифференциала dS:

$$dS = [F(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) - F_{\dot{x}}(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\cdot u(\tau,\xi)]d\tau + F_{\dot{x}}(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi. \tag{40}$$

Рассмотрим функцию $E(t,x,u,p)$, здесь t – момент времени, x, u и p – вектор (переменные u и p являются аналогами производных).

$$E(t,x,u,p) \triangleq F(t,x,p) - F(t,x,u) - F_{\dot{x}}(t,x,u)\cdot(p-u).$$

Теорема 7. *Если кроме условий 1 и 2, введенных в начале этого раздела, выполнено условие Вейерштрасса: существует* $\varepsilon > 0$, *что* $E(t,x,u,p) \geq 0$ *для всех* x, p, *таких, что* $\|x - x_*(t)\| \leq \varepsilon$, $\|p - \dot{x}_*(t)\| \leq \varepsilon$ *и* $u = u(t,x)$.

Доказательство. Выберем некоторую функцию $x(\cdot)$, удовлетворяющую условиям $x(t^0) = x^0$, $x(t^1) = x^1$. Для начала мы покажем чему равна разность между значениями функции S в разных точках $S(t^1,x^1) - S(t^0,x^0)$. Мы можем пройти из (t^0,x^0) в (t^1,x^1) разными путями, но результат от этого не изменяется в силу того, что функция S имеет дифференциал. Мы рассмотрим два пути: путь вдоль функции $x(\cdot)$ и вдоль экстремали $x_*(\cdot)$.

Тогда

$$S(t^1, x^1) - S(t^0, x^0) = \int_{t^0}^{t^1} dS(t, x(t)) = \int_{t^0}^{t^1} dS(t, x_*(t)) =$$

$$= \int_{t^0}^{t^1} [F(t, x_*(t), u(t, x_*(t))) - F_{\dot{x}}(t, x_*(t), u(t, x_*(t))) \cdot u(t, x_*(t))]dt +$$
$$+ F_{\dot{x}}(t, x_*(t), u(t, x_*(t)))dx_*(t).$$

Воспользуемся тем, что $u(t, t_*(t)) = \dot{x}_*(t)$. Тогда

$$\int_{t^0}^{t^1} dS(t, x(t)) = \int_{t^0}^{t^1} [F(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) - F^*_{\dot{x}}(t) \cdot \dot{x}_*(t)]dt + \int_{t^0}^{t^1} F^*_{\dot{x}}(t) \cdot dx_*(t).$$

Напомним, что верхний индекс «звездочка» означает, что в соответствующие переменные подставлена экстремаль $x_*(\cdot)$. Вспомнив формулу для дифференциала вдоль экстремали, получаем, что

$$\int_{t^0}^{t^1} dS(t, x(t)) = \int_{t^0}^{t^1} F(t, \hat{x}(t), \dot{x}_*(t))dt = J_1[x_*(\cdot)].$$

Используя эту формулу, мы оценим разницу между значениями $J_1[x(\cdot)]$ и $J_1[x_*(\cdot)]$. Имеем, что

$$J_1[x(\cdot)] - J_1[x_*(\cdot)] = \int_{t^0}^{t^1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt - \int_{t^0}^{t^1} dS(t, x(t)).$$

Формула для dS нам известна, это формула (40). Тогда

$$J_1[x(\cdot)] - J_1[x_*(\cdot)] =$$
$$= \int_{t^0}^{t^1} [F(t, x(t), \dot{x}(t)) - F(t, x, u(t, x(t))) +$$
$$+ F_{\dot{x}}(t, x(t), u(t, x(t)))(\dot{x}(t) - u(t, x(t)))]dt =$$
$$= \int_{t^0}^{t^1} E(t, x(t), u(t, x(t)), \dot{x}(t))dt. \quad (41)$$

Тогда, если выполнено условие Вейерштрасса, то при малом отклонении $x(t)$ от $x_*(t)$ и $\dot{x}(t)$ от $\dot{x}_*(t)$ верно неравенство $E(t, x(t), u(t, x(t)), \dot{x}(t)) \geq 0$. Что гарантирует, как видно из равенства (41), неравенство

$$J_1[x(\cdot)] - J_1[x_*(\cdot)] \geq 0.$$

А это и есть определение слабого экстремума.

$\square$

Следствие 1. *Если кроме условий 1 и 2 выполнено усиленное условие Лежандра: функция $z \mapsto z^T F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))z$ строго положительно определена, то $x_*(\cdot)$ доставляет слабый локальный минимум.*

Отметим, что это следствие обобщает теорему 6 на векторный случай.

Доказательство. Утверждение следствия исходит из разложения функции Вейерштрасса $E(t, x, p, u)$ по третей переменой. Имеем, что

$$E(t, x, u, p) = F(t, x, p) - F(t, x, u) - F_{x'}(t, x, u)(p - u).$$

Разложим $F(t, x, p)$ в ряд Тейлора по третей переменной, считая исходной точкой $p = u$. Тогда

$$F(t, x, p) = F(t, x, u) + F_{\dot{x}}(t, x, u)(p - u) + \frac{1}{2}(p - u)^T F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, q)(p - u).$$

Здесь q – некоторая точка, лежащая между u и p. Тогда подстановка в выражение функции Вейерштрасса дает, что

$$E(t, x, u, p) = \frac{1}{2}(p - u)^T F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, q)(p - u).$$

То есть для того чтобы $E(t, x, u, p)$ была положительной, вполне достаточно того, что квадратичная форма $z \mapsto z^T F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, q)z$ была строго положительной. Отметим, что мы предполагали следующее: $u = u(t, x(t))$, $p = \dot{x}(t)$ причем оба этих вектора недалеки от $\dot{x}_*(t)$. Тогда и q близко к $\dot{x}_*(t)$. Также нас интересуют только x близкие к $\dot{x}_*(t)$. Значит, достаточно того, что квадратичная форма $z \mapsto z^T F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))z$ положительно определена. Выбирая весьма маленькое ε мы добьемся того, что квадратичная форма $z \mapsto z^T F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, q)z$ строго положительно определена при $\|x - x_*(t)\| \leq \varepsilon$, $\|q - \dot{x}_*(t)\| \leq \varepsilon$. А этого достаточно для выполнения условия Вейерштрасса. $\square$

Также рассмотрим условия сильного экстремума. Отметим, что сильный экстремум учитывает лишь изменения самой функции, игнорируя близость производных.

Теорема 8. *Если кроме условий 1 и 2 выполнено усиленное условие Вейерштрасса: существует* $\varepsilon > 0$, *что* $E(t, x, u, p) \geq 0$ *для всех* x *таких, что* $\|x - x_*(t)\| \leq \varepsilon$, *всех* $p \in \mathbb{R}^n$ *и* $u = u(t, x)$, *то* $x_*(\cdot)$ *доставляет сильный минимум функционалу* J_1.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 7. Также может быть получено следствие 2.

Следствие 2. *Если кроме условий 1 и 2 выполнено усиленное условие Лежандра: квадратичная форма* $z \mapsto z^T F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_*(t), p)z$ *строго положительно определена для всех* $t \in [t^0, t^1]$, $p \in \mathbb{R}^n$, *то* $x_*(\cdot)$ *доставляет сильный локальный минимум.*

Библиографический список

1. Арутюнов А. В. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения / А. В. Арутюнов , Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров. – М. : Факториал Пресс, 2006. – 144 с.

2. Алексеев В. М. Сборник задач по оптимизации / В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М. : Наука, 1984. – 288 с.

3. Зеликин М. И. Оптимальное управление и вариационное исчисление / М. И. Зеликин. – М. : Эдиториал УРСС, 2000. – 160 с.

4. Галеев Э. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М. : 2000. – 318 с.

5. Гельфанд И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М. : Физматлит, 1961. – 228 с.

6. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М.Тихомиров. – М. : Наука, 1974. – 481 с.

7. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц . – М. : Наука, 1969. – 424 с.

Учебное издание
Для заметок

Авербух Юрий Владимирович
Сережникова Татьяна Ивановна

**ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ
ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

Редактор *Л. С. Гудкова*
Компьютерный набор *Ю. В. Авербуха и Т. В. Сережниковой*
Компьютерная верстка *Е. В. Суховой*

Подписано в печать 14.06.2014. Формат 60x90 1/16.
Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 2,75.
Уч.-изд. л. 1,8. Тираж 75 экз. Заказ № 1549.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
62000245, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
e-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8 (343) 358-93-06
e-mail: press-urfu@mail.ru